Lösung: Caesium 137

Überreste von Tschernobyl

Funktion: $\underbrace{i(\overset{\text{Jahre}}{x})}_{\substack{\text{Restmenge}\\ \text{in \%}}} = \underbrace{100}_{\substack{\text{Startwert}\\ 100\%}} \cdot \underbrace{0.5}_{\substack{\text{Abnahme}\\ \text{da} < 1}}^{\frac{x}{30}}$ ← Halbwertzeit (Profiwissen)

a) $i(15) = 70{,}7$

$i(x) = 10$ lösen mit nsolve

$x = 99{,}657... \approx 100$

$i(x):=100\cdot(0.5)^{\frac{x}{30}}$	Fertig
$i(15)$	70.7107E0
nSolve$(i(x)=10,x)$	99.6578E0

Nach 15 Jahren sind 70,7% vorhanden und nach ca. 100 Jahren sind noch 10% vorhanden.

b) Wenn 30% zerfallen sind, sind noch 70% da.
Löse mit nsolve: $i(x) = 70$ bei $x = 15{,}437 \approx 15$

nSolve$(i(x)=70,x)$	15.4372E0

Nach 15 Jahren sind noch 70% vorhanden.

c) Halbwertzeit: die Hälfte des Startwertes ist noch da.

$50 = 100 \cdot 0.5^{\frac{x}{30}}$
löse mit dem GTR

nSolve$\left(100\cdot(0.5)^{\frac{x}{30}}=50,x\right)$	30.E0

oder

$0.5^{\frac{x}{30}} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow\ 0.5^{\frac{x}{30}} = 0{,}5^{1}$

$\Leftrightarrow\ \frac{x}{30} = 1$

$\Leftrightarrow\ x = \underline{\underline{30}}$

Die Halbwertzeit beträgt 30 Jahre, das erkennt man am Nenner des Exponenten von 0.5 – aber nur, wenn die Basis auch 0.5 ist.

d) Die Funktionen $i(x)$ und $f(x)$ sind gleich, das sieht man, wenn man die Graphen zeichnet und beide übereinander liegen. Ich habe rechnerisch geprüft:

$i(0) = f(0) = 100$

$i(10) = f(10) = 79{,}370\ldots$

$i(100) = f(100) = 9{,}921$

e) $f(x) = 100 \cdot e^{-0.023x}$

$f(40) = 39{,}85\ldots \approx 40$

$f(x) = 20$ mit nsolve lösen

$x = 69{,}975 \approx 70$

$f(x):=100\cdot e^{-0.023\cdot x}$	*Fertig*
$f(40)$	39.8519E0
nSolve($f(x)=20,x$)	69.9756E0

Nach 40 Jahren sind 40% noch da, nach 70 Jahren ist die Menge auf 20% gefallen.

f) Zu Beginn sind 100% da ($f(0) = 100$) nach einem Jahr $f(1) = 97{,}7$ also 98%.

Im ersten Jahr sind also ca. 2% zerfallen.

g) erinnern: $f(x) = \underbrace{100}_{\text{Startwert}} \cdot e^{-0.023x}$

$f'(x) = 100 \cdot \underbrace{(-0.023)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot e^{-0.023x} = -2{,}3 \cdot e^{-0.023\cdot x}$

Die Ableitung hat die Einheit prozentuale Änderung pro Jahr, da die Ableitung die Änderungsrate ist.

$f'(10) = -2{,}3 \cdot e^{-0.023\cdot 10} = 1{,}82$

Es nimmt nach 10 Jahren um 1,8% pro Jahr ab.

h) $m(t) = M_0 \cdot e^{-a\cdot t}$

M_0 ist die Menge, die zu Beginn bei $x = 0$ vorhanden ist. Dies kann eine Masse in kg sein, aber auch eine relative Größe zum Beispiel 100 oder 1 oder 100%.
Da die Menge abnimmt, muss e^{-a} ein Minus vor dem positiven a stehen.

i) gesucht: M_0 bei $a = 0{,}1$ $x = 7$ $f(7) = 35\,g$

$$f(x) = M_0 \cdot e^{-a \cdot x}$$

also $$35 = M_0 \cdot e^{-0.1 \cdot 7} \quad \Big| : e^{-0.1\cdot 7}$$

$$70{,}5 = M_0$$

Die Startmenge beträgt 70,5 g.

$\frac{35}{e^{-0.1\cdot 7}}$ 70.4813E0

j) gesucht: a bei: $x = 4$ $f(4) = 10$ $M_0 = 45$

$$f(x) = M_0 \cdot e^{-a x}$$

also $$10 = 45 \cdot e^{-a \cdot 4}$$ lösen mit nsolve

$a = 376{,}019E{-}3 = \underline{\underline{0{,}347}}$ nSolve$(10=45\cdot e^{-a\cdot 4},a)$ 376.019E-3

Die Zerfallskonstante beträgt $a = 0{,}376$.