Zusammengesetzten Funktionen - Verkettete Funktionen

Aus der 9. Klasse kennen wir bereits die um d verschobene Normalparabel

$$f(x) = (x - d)^2.$$

Genauer betrachtet entsteht diese aus der Normalparabel $f(x) = x^2$, indem wir x durch $x - d$ ersetzen. Diesen Prozess nennt man die **Verkettung zweier Funktionen**.

Verkettung von Funktionen

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ lassen sich verketten, indem $g(x)$ in $f(x)$ bzw. $f(x)$ in $g(x)$ eingesetzt wird. Hierdurch erhält man die neuen Funktionen $f(g(x))$ bzw. $g(f(x))$.

Beispiel

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = 2x - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(g(x)) = (2x - 1)^2 \\ g(f(x)) = 2(x^2) - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ g(x) = 3x + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(g(x)) = e^{3x+2} \\ g(f(x)) = 3(e^x) + 2 \end{cases}$$

In dem Beispiel der um d verschobenen Normalparabel besteht $f(x) = (x - d)^2$ aus der Verkettung der Funktionen $g(x) = x^2$ mit $h(x) = x - d$. Die Funktion $f(x)$ lässt sich somit schreiben als $g(h(x))$.

Aufgabe 1

Bestimme die Verkettungen $f(g(x))$ bzw. $g(f(x))$ der folgenden Paare von Funktionen.

(a) $\begin{cases} f(x) = x + 5 \\ g(x) = x^3 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} f(x) = (x - 1)^2 \\ g(x) = x + 1 \end{cases}$
(g) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x - 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 2x \\ g(x) = x^2 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} f(x) = \sin(x) \\ g(x) = e^x \end{cases}$
(h) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x) = e^x \\ g(x) = x^3 \end{cases}$
(f) $\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 \\ g(x) = (1 - x)^2 \end{cases}$
(i) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x^2 \end{cases}$

Aufgabe 2

Im Folgenden ist eine Funktion gegeben, die sich als Verkettung zweier Funktionen schreiben lässt. Bestimme mögliche Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, sodass $f(x) = u(v(x))$.

(a) $f(x) = (5x + 3)^3$
(d) $f(x) = \frac{1}{3x^4+2x^2+1}$
(g) $f(x) = \frac{1}{x^2}1$

(b) $f(x) = e^{-x^2}$
(e) $f(x) = 3e^{\sqrt{x+2}}$
(h) $f(x) = (e^x)^2 + 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$
(f) $f(x) = 50 \cdot 2^{x^2-1}$
(i) $f(x) = \cos(2x^2 + 3)$

Sprinteraufgabe 1

Bestimme die Definitionsmenge[1] der Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $f(g(x))$ und $g(f(x))$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x + 5 \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = x^2 - 1 \end{cases}$

Sprinteraufgabe 2

Begründe, dass sich die Definitionsmenge der Funktionen $f(g(x))$ von der Definitionsmenge der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ unterscheidet.

(a) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2-1} \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

Sprinteraufgabe 3

Begründe, dass $f(g(x))$ eine mögliche Verknüpfung der beiden Funktionen f und g ist, während die Verknüpfung $g(f(x))$ nicht möglich ist.

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ g(x) = -x^2 - 1 \end{cases}$$

[1]Erinnerung: Die Werte, die man für x einsetzen darf