LÖSUNG:

Integralrechnung mit zusammengesetzten Exponentialfunktionen

Aufgabenteil e)

Um zu prüfen, wie sich die Wassermenge in den ersten 6 Stunden verändert hat, rechne das doch einfach aus. Das ist im übrigen die gleiche Aufgabe wie in der Aufgabe zuvor – nur anders formuliert.

$$\int_0^6 f(x) \cdot dx = -1{,}525 \ldots$$

$f(x) := (x^3 - 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x) \cdot e^{-0.5 \cdot x}$ *Fertig*

$\int_0^6 f(x)\, dx$ -1.52505

Es sind also in den ersten 6 Stunden 1525m³ Wasser aus dem Becken geflossen.

Aufgabenteil f)

Hier muss man sich erst einmal überlegen, warum das Becken zu Beginn denn gar nicht leer gewesen sein kann? Hast Du eine Idee?

Du weißt ja nur, wieviel Wasser hinaus und hineingeflossen ist aber nicht, wieviel am Anfang drinnen war. Und aus den Infos kannst Du ableiten, dass das Becken nicht leer gewesen sein kann.

Du hast ausgerechnet bzw. gesehen, dass das Becken nach 6 Stunden 1525m³ Wasser weniger hat als zu Beginn. Wenn das Becken also zu Beginn leer gewesen wäre, dann wäre es jetzt „negativ voll gewesen“ – was es ja nicht gibt. Also muss zu Beginn mindestens 1525 m³ im Becken gewesen sein.

Aufgabenteil g)

Na, wenn man nicht weiterweiß, dann probieren wir es doch einfach aus ….

$$\int_0^{24} f(x)\,dx \qquad 15.843$$

$$\int_0^{240} f(x)\,dx \qquad 16.$$

$$\int_0^{2400} f(x)\,dx \qquad 16.$$

Und was würdest Du sagen? Für unendlich große obere Grenzen hat nähert sich das Integral dem Wert 16 an.

Aufgabenteil h)

Um dies zu lösen brauchen wir die beiden Stammfunktionen und die Ausgangsfunktion.

$$f(x) = (x^3 - 8x^2 + 12x) \cdot e^{-0.5x}$$

$$G(x) = (-2x^3 + 4x^2 - 8x + 12) \cdot e^{-5x}$$

$$H(x) = (-2x^3 + 4x^2 - 8x - 16) \cdot e^{-0.5x}$$

Ich behaupte mal, dass Du mit einem Blick die Funktion G als Stammfunktion von f ausschließen kannst, weil … ja weil der Exponent ein anderer ist und der beim Ableiten (und damit auch beim Integrieren) immer gleich bleiben muss.

Und bei der Funktion H bleibt Dir nichts anderes übrig, als diese abzuleiten (eine ziemliche Arbeit …) … aber mache es mal …

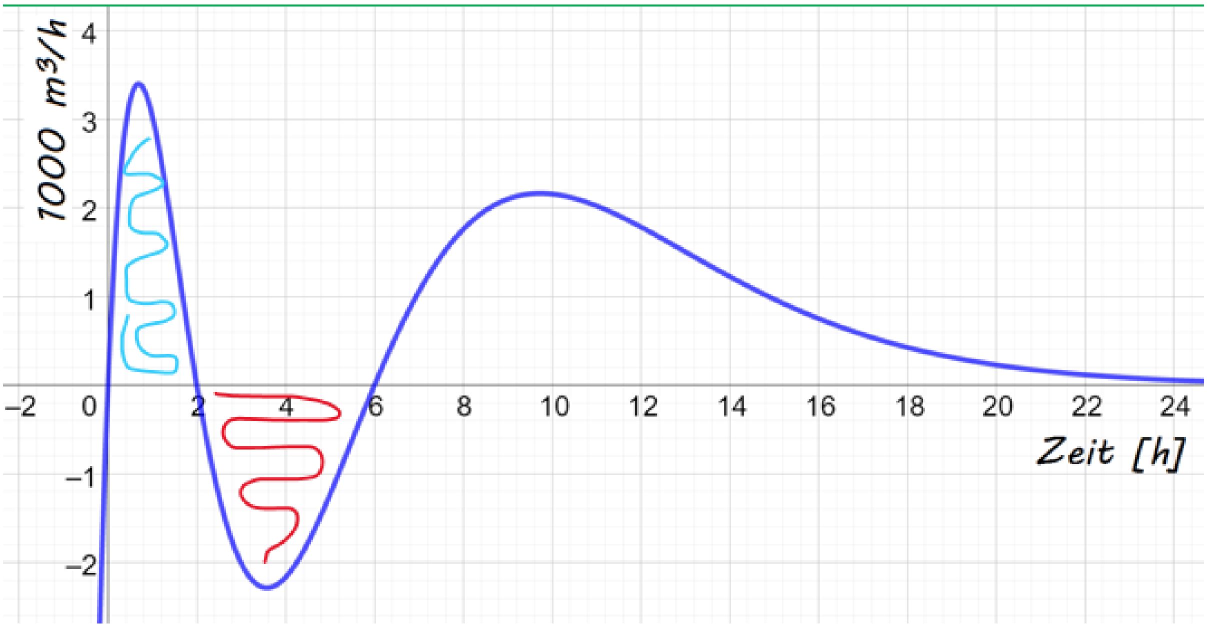
$$
\begin{aligned}
H(x) &= (-2x^3+4x^2-8x-16)\cdot e^{-0.5x} \\
h(x) &= (-2x^3+4x^2-8x-16)\cdot(-0.5)\cdot e^{-0.5x}+(-6x^2+8x-8)\cdot e^{-0.5x} \\
&= (x^3-2x^2+4x+8)\cdot e^{-0.5x}+(-6x^2+8x-8)\cdot e^{-0.5x} \\
&= (x^3-2x^2-6x^2+4x+8x+8-8)\cdot e^{-0.5x} \\
&= (x^3-8x^2+12x)\cdot e^{-0.5x} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Mit den Hilfen:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -2x^3+4x^2-8x-16 \\
u'(x) &= -6x^2+8x-8 \\
v(x) &= e^{-0.5x} \\
v'(x) &= -0.5\cdot e^{-0.5x}
\end{aligned}
$$

Aufgabenteil i)

Hier suchen wir eine Grenze des Integrals – und zwar die obere. Denn wir fragen uns ja, wann soviel Wasser aus dem Becken geflossen ist, wie in den ersten beiden Stunden hineingeflossen ist.



Da wir ja wissen, dass zwischen 2 und 4 Stunden mehr hinausgeflossen als vorher hineingeflossen ist, muss es also zwischen 2 und 4 eine Stelle geben, an der der Stand wie zu Beginn erreicht wird. Das Integral von 0 bis zur unbekannten Obergrenze a muss also 0 sein, dann ist der Stand wie zu Beginn.

$$\int_0^a f(x)\cdot dx = 0$$

Und diese Gleichung muss nun gelöst werden, so dass man ein a findet – von mir aus auch mit dem Prinzip „Versuch und Irrtum“.

$f(x):=\left(x^3-8\cdot x^2+12\cdot x\right)\cdot e^{-0.5\cdot x}$	*Fertig*
$\text{nSolve}\left(\int_0^a f(x)\,dx=0,a\right)$	0.
⚠ $\text{nSolve}\left(\int_0^a f(x)\,dx=0,a,2\right)$	4.41617

Nachdem man die Lösung a=0 ausgeschlossen hat (denn dass es zu Beginn so voll wie zu Beginn ist, ist ja irgendwie klar), ist also die Lösung a=4,4 … also nach 4,4 Stunden ist das ecken so voll wie zu Beginn.

Aufgabenteil j)

Na dann berechne den Term doch einfach mal!!!

$f(x):=\left(x^3-8\cdot x^2+12\cdot x\right)\cdot e^{-0.5\cdot x}$	*Fertig*
$\dfrac{\int_0^6 f(x)\,dx}{6}$	-0.254175

Dieser Term gibt die durchschnittliche Höhe der Funktion f im Bereich von 0 bis 6 an – und diese beträgt hier -0,25. Es ist also in den ersten 6 Stunden durchschnittlich 0,25 m³/h aus dem Becken geflossen.

Aufgabenteil k)

Dann zu den drei Termen:

I. $\int_0^6 f(x) \cdot dx$

II. $\int_0^2 f(x) \cdot dx + \int_2^6 f(x) \cdot dx$

III. $\left|\int_0^2 f(x) \cdot dx\right| + \left|\int_2^6 f(x) \cdot dx\right|$

Schaut man sich I und II genauer an so sieht man, dass diese beiden GENAU DAS GLEICHE bedeuten. Man berechnet, wie sich das Waser verändert hat in den ersten 6 Stunden.

Beim zweiten und dritten Term ist der zweite Teil ja bekannterweise negativ (weil in dem Zeitraum Wasser hinausgeflossen ist). Nimmt man den Betrag, so wird dieser Teil positiv – der letzte Term ist also der größte. Er gibt an, wieviel Wasser insgesamt hinein und hinausgeflossen ist – also die Durchflussmenge durch das Rohr insgesamt.