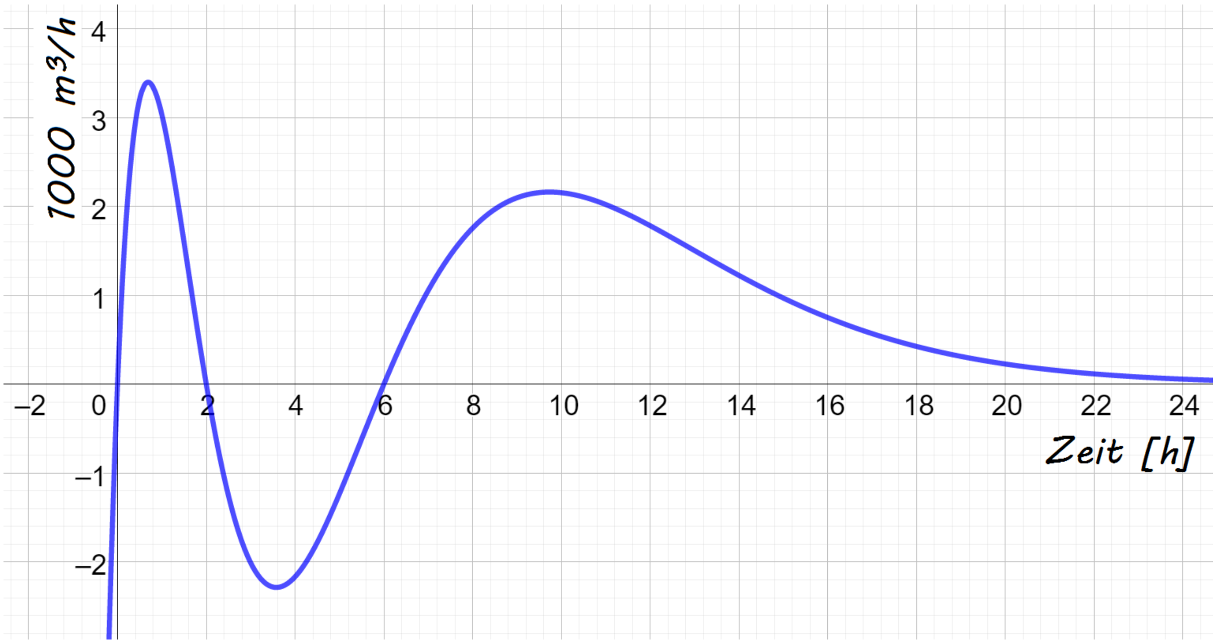
Integralrechnung mit zusammengesetzten Exponentialfunktionen

Ein Becken soll mit Wasser befüllt werden. Gemessen werden kann aus technischen Gründen nur die Änderungsrate des Wassers im Becken – die durch die Funktion f modelliert wird. Dabei bildet die Funktion f die Änderungsrate in der Einheit $[1000\frac{m^3}{h}]$ in Abhängigkeit von der Zeit in der Einheit Stunden ab. Die Funktion f modelliert den Verlauf der Änderungsrate in einem Zeitraum von 24h – beginnend bei $x = 0$.

$$f(x) = (x^3 - 8x^2 + 12x) \cdot e^{-0.5x}$$



Aufgaben zur Integralrechnung

a) Beschreibe den Funktionsverlauf unter Berücksichtigung des Sachzusammenhangs.
b) Skizziere im gegebenen leeren Koordinatensystem (nächste Seite) die Funktion, die die Wassermenge im Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt und erläutere dies in eigenen Worten. >>> HILFEN
c) Bestimme, wieviel Wasser in den ersten beiden Stunden in das Becken geflossen ist.
d) Entscheide begründet, wie sich der Wasserstand nach 6 Stunden im Vergleich zum Beginn verändert hat.
e) Berechne, wie sich die Wassermenge nach den ersten sechs Stunden verändert hat.
f) Das Becken kann zu Beginn der Befüllung nicht leer gewesen sein. Begründe und gib an, wieviel Wasser zu Beginn im Becken gewesen sein muss.
g) Prüfe, wie sich die Wassermenge unabhängig von der oberen Schranke bei $x = 24$ für unendlich große x entwickelt.

h) Gegeben sind zweit mögliche Stammfunktionen der Funktion f – nämlich:

$$G(x) = (-2x^3 + 4x^2 - 8x + 12) \cdot e^{-5x}$$

$$H(x) = (-2x^3 + 4x^2 - 8x - 16) \cdot e^{-0.5x}$$

Eine der beiden Funktionen kann gar nicht eine Stammfunktion von f sein. Begründe. Zeige anschließend mithilfe der Ableitungsregeln, dass die andere Funktion eine Stammfunktion von f ist.

i) Bestimme den Zeitpunkt, an dem die Wassermenge im Becken die gleiche Höhe wie zu Beginn erreicht hat.

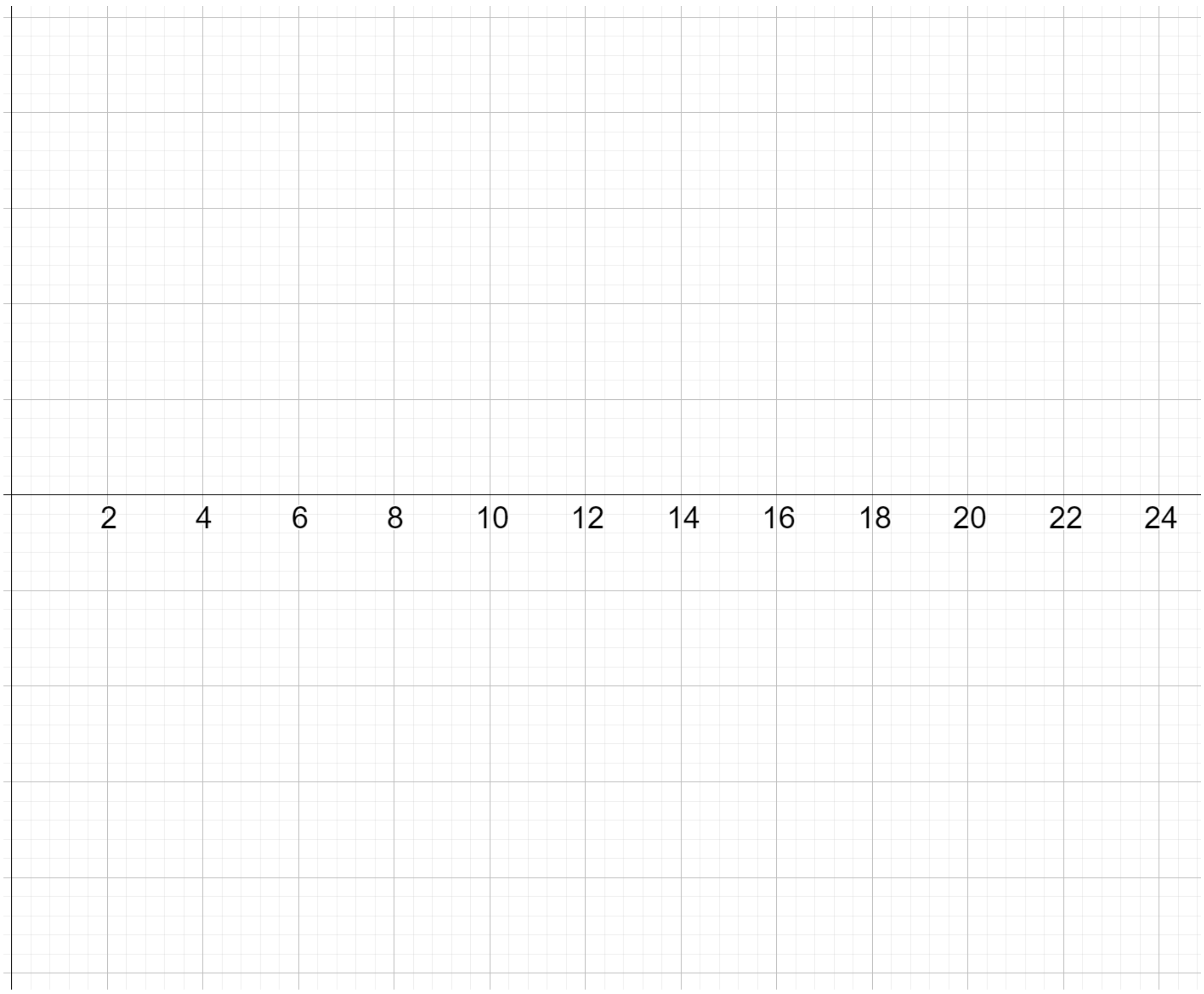
j) Berechne den Term $\frac{\int_0^6 f(x) \cdot dx}{6}$ und erläutere dessen Bedeutung.

k) Erkläre die Bedeutung der drei Terme insbesondere unter Hervorhebung der Unterschiede.

I. $\int_0^6 f(x) \cdot dx$

II. $\int_0^2 f(x) \cdot dx + \int_2^6 f(x) \cdot dx$

III. $\left|\int_0^2 f(x) \cdot dx\right| + \left|\int_2^6 f(x) \cdot dx\right|$



Weitere Aufgaben zur vollständigen Funktionsuntersuchung.

a) *Bestimme die Nullstellen der Funktion und gib deren Bedeutung im Sachzusammenhang an.*
b) *Bestimme den Zeitpunkt der maximalen Zufluss Rate im gegebenen Intervall.*
c) *Berechne den Zeitpunkt, an dem die Änderungsrate der Wassermenge am stärksten zunimmt.*
d) Es war geplant, das Becken mit der Funktion $g(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x-6) \cdot e^{-0.6x}$ zu befüllen. Der Graph dieser Funktion ist in der folgenden Abbildung rot dargestellt. *Erkläre ohne zu rechnen, warum die Funktion g die Nullstellen an den Stellen $x = 0$, $x = 3$ und $x = 6$ hat.*
e) *Bestimme den Zeitpunkt, an dem die beiden Funktionen den größten Unterschied haben.*