

Wachstum eines Baums

Ein junger Baum wird als Setzling mit einer Höhe von 1,1m in einem Waldgebiet ausgesetzt. Bei einem Baum weiß man, dass dieser vor allem in den jungen Jahren recht schnell wächst. Das Wachstum nimmt aber im Laufe der Zeit immer mehr ab, so dass der Baum irgendwann ausgewachsen ist.

Zu Modellierung dieser Wachsgeschwindigkeit nutzt man eine Exponentialfunktion in unserem Fall die Funktion $f(x) = A_0 \cdot w^x$ mit den beiden Koeffizienten A_0 und w . Der Funktionswert f gibt hierbei die Wachstumsgeschwindigkeit in der Einheit Zentimeter pro Jahr und der x -Wert die Anzahl der Jahre, seitdem der Baum ausgesetzt wurde.

Zunächst einmal setzen wir uns mit dieser allgemeinen Funktion auseinander. Über den QR-Code kannst Du zu einer geogebra-Simulation gelangen.



- Für eine bestimmte Baumart nutzt man den Koeffizienten $w = 0,85$. Skizziere mithilfe des GTRs einige Graphen für verschiedene Koeffizienten A_0 mit $40 \leq A_0 \leq 120$ und beschreibe den Einfluss des Koeffizienten A_0 im Sachzusammenhang.
- Bei einer anderen Baumart ist der Koeffizient $A_0 = 85$ bekannt. Untersuche den Einfluss des Koeffizienten w für den Bereich $0,6 \leq w \leq 1,1$ und erläutere die Bedeutung im Sachzusammenhang. Beschreibe ebenfalls, wie w gewählt werden muss, wenn die beschriebenen Voraussetzungen gelten.
- „Das Baumwachstum nimmt jedes Jahr um 17% ab. Im ersten Jahr wächst der Baum um 1,1m pro Jahr.“ Erstelle eine Funktion, die aufgrund des gegebenen Textes die Wachstumsgeschwindigkeit modelliert und beschreibe Dein Vorgehen.

Für einen bestimmten Baum soll ab jetzt die Funktion $f(x) = 90 \cdot 0,8^x$ gelten.

- Berechne die Wachstumsgeschwindigkeit des Baums nach 5 Jahren und nach 15 Jahren.
- Berechne, nach welcher Zeit die Wachstumsgeschwindigkeit $35 \frac{cm}{Jahr}$ beträgt.
- Als Halbwertszeit bezeichnet man die Zeit, in der die Größe einer fallenden Exponentialfunktion auf den halben Wert fällt. Erläutere den Begriff Halbwertszeit mithilfe einer selbstgewählten Skizze und berechne anschließend die Halbwertszeit der Wachstumsgeschwindigkeit.
- Nach 10 Jahren nimmt das Wachstum nicht weiter exponentiell, sondern linear ab. Erstelle die Tangente, die die Funktion an der Stelle $x=10$ knickfrei weiterführt und berechne, wann das Wachstum aufgehört hat.

Manchmal ist die Funktion für die Wachstumsgeschwindigkeit noch nicht klar.

h) Berechne den fehlenden Koeffizienten

- Ein Baum soll nach 3 Jahren um 69 cm pro Jahr wachsen: $f(x) = A_0 \cdot 0,9^x$
- Nach 5 Jahren wächst ein Baum nur noch 12,6 cm: $f(x) = 75 \cdot w^x$.

Für einen anderen Baum soll ab jetzt die Funktion $f(x) = 120 \cdot 0,92^x$ gelten.

- Bestimme $\int_0^{10} f(x) \cdot dx$ und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- Bestimme das durchschnittliche Wachstum in den ersten 4 Jahren.
- Bestimme, wie hoch der Baum maximal wird und skizziere eine Funktion, die die Baumhöhe in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.
- Bestimme, wie viele Jahre nach dem Aussetzen es dauert, bis der Baum 5m gewachsen ist.