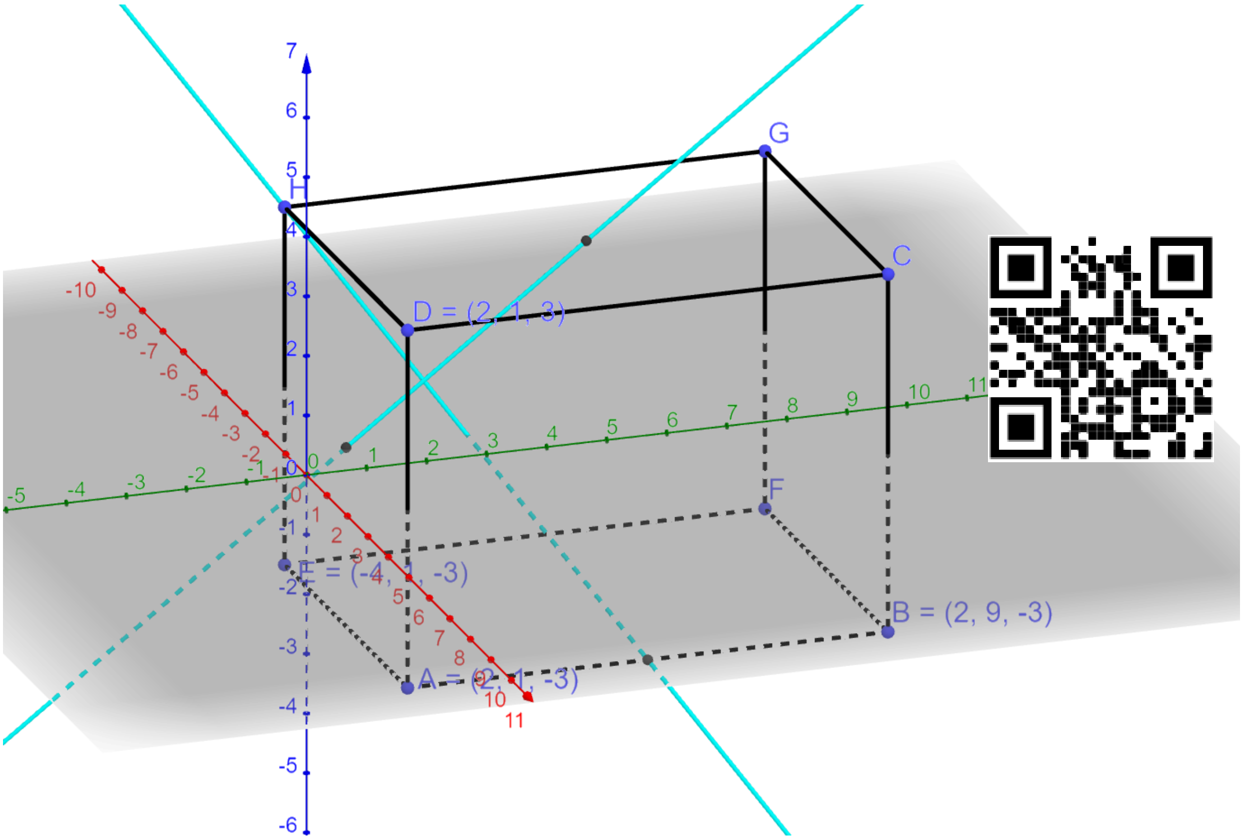
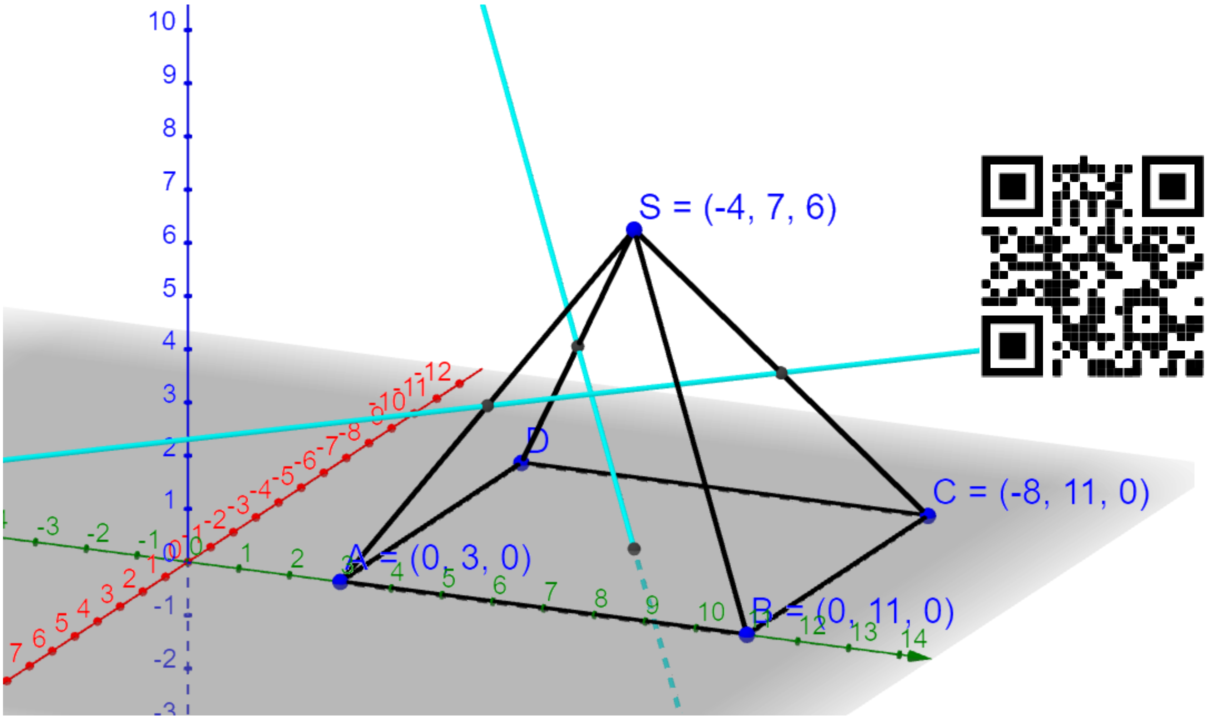
Vermischte Übungen

Aufgabe 1 **Quader und Pyramide**



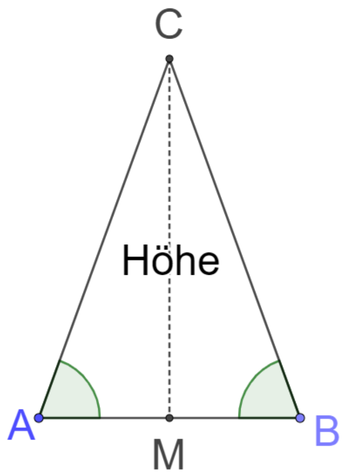


a) Bestimme die fehlenden Koordinaten des Quaders in Figur 2.
b) Zeige rechnerisch, dass die Grundfläche des Quaders im Punkt A einen rechten Winkel hat.
c) Berechne das Volumen des Quaders.

Die eingezeichneten Punkte sollen immer die Mittelpunkte sein – also entweder die Mittelpunkte auf den Seitenkanten oder die Flächenmittelpunkte, also die Punkte, die genau in der Mitte der Fläche liegen.

d) Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes M, der in der Mitte der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt.
e) Berechne die Geradengleichung der Geraden, die durch die beiden Figuren laufen.

Um die Fläche eines Dreiecks zu berechnen, benötigt man die sogenannte Höhe eines Dreiecks und dessen Grundseite. In einem gleichschenkligen Dreieck (und auch in einem gleichseitigen Dreieck) ist die Höhe des Dreiecks der Abstand des Scheitelpunktes von der Mitte der Grundseite.



Im Falle dieses Dreiecks wäre die Fläche also:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{MC}|$$

f) Berechne die Fläche der Seite eines Dreiecks der Pyramide.
g) Berechne die Fläche der quadratischen Grundfläche der Pyramide.
h) Berechne das Volumen der Pyramide.

Aufgabe 2 Dreiecke und Geraden

Gegeben ist ein Dreieck mit den Punkten $A = (3,3,6)$, $B = (2,7,6)$ und $C = (4,2,5)$ ebenso wie die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Prüfe, ob die Punkte A, B und C auf der Gerade g liegen und beantworte anschließend, welche Seite (wenn überhaupt) des Dreiecks in der Geraden g liegt.
b) Formuliere eine Gerade k, die echt parallel zur Geraden g ist.
c) Überprüfe die Lage der Geraden g und h zueinander.
d) Prüfe, ob die Gerade durch die Punkte A und B senkrecht zur Geraden h verläuft.

Aufgabe 3 Ballon und Flugzeug

Ein Heißluftballon startet im Punkt $A = (2,5,0)$ und bewegt sich gradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Nach einer Stunde hat der Ballon den Punkt $B = (4,8,1)$ erreicht. Ein Kleinflugzeug befindet sich zum Startzeitpunkt des Ballons in Position $P = (10,15,1)$ und fliegt mit dem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -30 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$, der die Bewegung pro Stunde angibt. Alle Koordinaten sind in Kilometern angegeben.

a) Das Kleinflugzeug ist schneller als der Ballon. Bestimme deren Geschwindigkeiten und gib an, um welchen Faktor das Kleinflugzeug schneller ist.
b) Berechne, wie weit die Startpunkte der beiden Fluggeräte voneinander entfernt sind.
c) Gib die Position der beiden Fluggeräte 4 Stunden nach dem Start an.
d) Gib die Koordinaten eines Punktes an, der nicht auf der Flugbahn des Kleinflugzeuges liegt und zeige dies rechnerisch.
e) Prüfe, ob die Flugbahnen der beiden Geräte sich kreuzen und entscheide, ob es einen Zusammenstoß gibt.
f) Für diese Textaufgabe wurden einige Bedingungen teilweise unausgesprochen festgelegt. Erläutere mindestens zwei dieser Bedingungen und urteile, ob dies realistisch ist.