Übungsaufgaben für eine Klausur (mit GTR)

Ich möchte mich als Künstler versuchen und baue daher im Duisburger Rheinpark ein begehbares Kunstwerk. Dieses besteht aus einem Tetraeder, das auf drei Stelzen steht. Da die Wiese unter dem Tetraeder nicht ebenerdig ist, sind die drei Stelzen unterschiedlich lang – die längste ist 5m lang. Bei einem Tetraeder sind alle Seiten annähernd gleichlang und damit auch alle Seitenflächen gleich groß. Die Zahlen sind in der Einheit Meter angegeben.

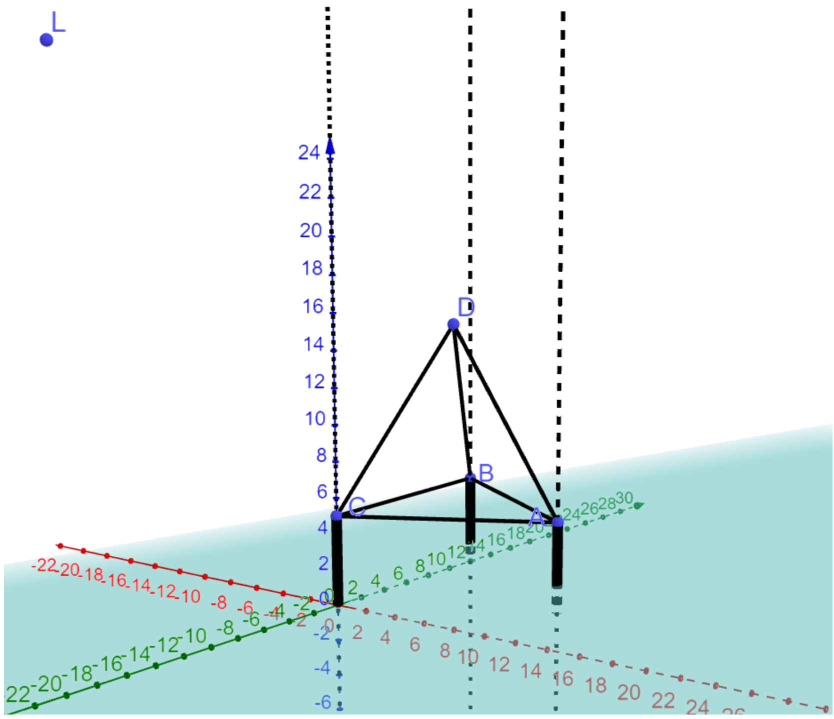
Die vier Koordinaten des Tetraeders lauten: $A = (10.4; 6; 5)$, $B = (0; 12; 5)$, $C = (0; 0; 5)$ und $D = (3.4; 6; 15)$

Die Wiese wird als Ebene E angenommen, deren Gleichung ebenfalls gegeben ist:

$$E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TIPP zum Üben: Zeichne das Tetraeder mithilfe von geobegra erst einmal ohne die Füße, damit Du es Dir besser vorstellen kannst.

Einführungsaufgabe aus dem Unterricht – der Schatten des Tetraeders



Das Tetraeder wird von der Position $L = (-10; -10; 30)$mit einem sehr gellen Scheinwerfer beleuchtet.

Konstruiere den Schatten des Tetraeders auf der Wiese.

Überlege Dir, wie Du die Eckpunkte des Schattens berechnen kannst. Und wenn Du das weißt, dann berechne mal einen der Eckpunkte (aber nur einen).

a) Zeige, dass die Grundfläche des Tetraeders ein gleichseitiges Dreieck ist.
b) Zeige, dass im Dreieck ABS beim Punkt B kein rechter Winkel liegt.

Eine Seite des Tetraeders soll mit einer bunten Plane bespannt werden, auf die mit einem Laser projiziert werden kann.

c) Bestimme den Mittelpunkt der Strecke BC und mithilfe dessen die Kosten für die Projektionsfläche BCD, die pro m² einen Preis von 130 € kostet.
d) Bestimme rechnerisch drei Punkte, die auf der Ebene unter dem Tetraeder liegen.

> **TIPP zum Üben:** Ergänze nun die Ebene E in Deiner 3D Skizze. Konstruiere die Füße mithilfe der Aufgaben.

Ein Architekt muss die Länge der Stelzen berechnen, um diese zu planen. Dazu will er drei Geradengleichungen erstellen, die senkrecht „nach unten“ und durch die drei Punkte A, B und C verläuft.

e) Überlege Dir, welcher Richtungsvektor für diese drei Geraden genutzt werden muss, so dass diese „gerade nach unten bzw. gerade nach oben“ verlaufen.
f) Die Gerade durch den Punkt A lautet: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10.4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimme den Schnittpunkt dieser Gerade mit der Wiese E und abschließend den Abstand des Schnittpunktes vom Punkt A. Interpretiere diesen Abstand im Sachzusammenhang.

> **TIPP zum Üben:** Ergänze nun die Position des Beamers und die Geradengleichung, die im Text angegeben ist. Später hilft auch die Ebene S.

Der Beamer wird auf einem benachbarten hohen Turm an den Koordinaten $Z = (-29; 6; 18.2)$ aufgestellt und auf die bespannte Seite ausgerichtet. Der Beamer leuchtet in die Richtung $\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -5.1 \end{pmatrix}$ Der Techniker ist sehr stolz, da der Beamer die Projektionsfläche senkrecht trifft.

g) Jetzt checken wir, ob der Beamer richtig aufgestellt ist.
   a. Erstelle die Geradengleichung g des Lichtes, das aus (der Mitte) des Beamers herausstrahlt.
   b. Erstelle die Ebenengleichung S, in der das Dreieck BCD liegt, indem Du alle Schritte zur Erstellung erläuterst.
   (Benutze als Ebene S diese Ebenengleichung zum Weiterrechnen:
   $S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3.4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$)
   c. Prüfe mithilfe des Richtungsvektors der Gerade und der Richtungsvektoren der Ebene, ob die Gerade g die Ebene senkrecht trifft.
   d. Berechne den Schnittpunkt K zwischen dem Beamerstrahl und der Ebene S.