

Lösung: Lage von Gerade und Ebene

1. Ebene E und Gerade g

1. Ebene und Gerade - gleichsetzen

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
linSolve(
  {
    -1+5*t=1+3*r+s
    2+7*t=2+r+3*s
    2+3*t=-2+r+s
  }, {r,s,t}
)
"Keine Lösung gefunden"
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da der GTR keine Lösung findet, sind Ebene und Gerade echt parallel.

alle Variablen auf eine Seite

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix: Auf Vorzeichen achten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \text{] tauschen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3 \cdot \text{I} \\ -\text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array} \right) \cdot (-4) + \text{II}$$

$$\text{NR: } -5 - 3 \cdot (-7) = -5 + 21 = 16$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array} \right)$$

An der letzten Zeile erkennt man, dass es keine Lösung gibt: $0 \cdot t = -18 \quad \downarrow$

2. Ebene E und Gerade g:

2. Ebene und Gerade - gleichsetzen

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3,5 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3,5 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

GTR:

$$\text{linSolve} \left\{ \begin{cases} 1+3r+s=-1-1,5t \\ 2+r+3s=2-3,5t \\ -2+r+s=2-3,5t \end{cases}, \{r,s,t\} \right\}$$

{-1,-2,2}

Es gibt genau eine Lösung

Umsortieren für die Matrix:

$$r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1,5 & -2 \\ 1 & 3 & 3,5 & 0 \\ 1 & 1 & 3,5 & 4 \end{array} \right) \text{] tauschen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3,5 & 0 \\ 3 & 1 & 1,5 & -2 \\ 1 & 1 & 3,5 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3 \cdot I \\ -I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3,5 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) \leftarrow \text{fertig}$$

$$\text{III } -2s = 4 \quad | :(-2) \\ \Leftrightarrow s = -2$$

$$\text{II } -8s - 9t = -2 \\ \Leftrightarrow 16 - 9t = -2 \quad | -16 \\ \Leftrightarrow -9t = -18 \quad | :(-9) \\ \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{I } r + 3s + 3,5t = 0 \\ \Leftrightarrow r + 3 \cdot (-2) + 3,5 \cdot (2) = 0 \\ \Leftrightarrow r - 6 + 7 = 0 \quad -1 \\ \Leftrightarrow r = 1$$

Es gibt eine Lösung, also einen Schnittpunkt.

3. Ebene E und Gerade g:

3. Ebene und Gerade - gleichsetzen

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{linSolve} \left\{ \begin{array}{l} 1+3 \cdot r+s=-4+10 \cdot t \\ 2+r+3 \cdot s=-5+14 \cdot t \\ -2+r+s=-5+6 \cdot t \end{array} \right\}, \{r,s,t\}$$

{2 · c2-1, 4 · c2-2, c2}

An dem c2 erkennt man, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

Umsortieren, um eine Gauß-Matrix zu erstellen

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -10 & -5 \\ 1 & 3 & -14 & -7 \\ 1 & 1 & -6 & -3 \end{array} \right) \quad] \quad \text{tauschen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -14 & -7 \\ 3 & 1 & -10 & -5 \\ 1 & 1 & -6 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3 \cdot \text{I} \\ -\text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -14 & -7 \\ 0 & -8 & 32 & 16 \\ 0 & -2 & 8 & 4 \end{array} \right) \cdot 4 \quad -\text{II}$$

$$\text{NR: } -10 - 3 \cdot (-14) = -10 + 42 = 32$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -14 & -7 \\ 0 & -8 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, da $0t = 0$ für alle t gilt. Also liegt die Gerade in der Ebene.