## Übungsaufgaben LÖSUNG

### Aufgabe 1 Quader und Pyramide

a) Merke $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{HG} = \vec{EF} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$$= \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{FG} = \vec{EH} = \vec{OD} - \vec{OA}$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$$

$\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH} = \vec{OE} - \vec{OA}$

$$= \begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

Punkte:

$$\vec{OF} = \vec{OE} + \vec{AB} = \begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\9\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \ldots = \begin{pmatrix}2\\9\\3\end{pmatrix}$$

oder auch anders ...

$$\vec{OH} = \vec{OE} + \vec{AD} = \ldots = \begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{AD} = \ldots = \begin{pmatrix}-4\\9\\3\end{pmatrix}$$

b) $\vec{AE} = \vec{OE} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} = -6\cdot 0 + 0\cdot 8 + 0\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Sind also senkrecht.

c) $|\vec{AB}| = \sqrt{8^2} = 8$

$|\vec{AD}| = \sqrt{6^2} = 6$

$|\vec{AE}| = \sqrt{(-6)^2} = 6$

$V = \text{Breite} \cdot \text{Länge} \cdot \text{Höhe}$

$= 8 \cdot 6 \cdot 6 = \underline{\underline{288\,VE}}$

d) $\vec{OM}_{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$$= \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-4\\7\\0\end{pmatrix}}}$$

NR: $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$$= \begin{pmatrix}-8\\11\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{OM}_{BC} = \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \ldots = \begin{pmatrix}-4\\11\\0\end{pmatrix}$$

e) 1) Gerade Quader durch H und Mitte AB.

$\vec{OM} = OA + \frac{1}{2}\vec{AB} = \ldots = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gerade: $\vec{x} = \vec{OH} + r\ \vec{HM}$

$= \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

NR: $\vec{HM} = \vec{OM} - \vec{OH}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

2) Gerade Quader durch Flächenmitten

$\vec{OM_1} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{OM_2} = \vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{DG}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

NR: $\vec{DG} = \vec{OG} - \vec{OD}$

$= \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gerade: $\vec{x} = \vec{OM_1} + s \cdot \vec{M_1M_2}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

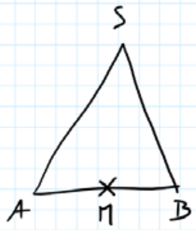
$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Geraden durch die Pyramide

... viel Erfolg ...

f) $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{MS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$




$|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 8$

$|\vec{MS}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7{,}2$

$A = \frac{1}{2}\,|\vec{AB}| \cdot |\vec{MS}| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7{,}2 = \underline{\underline{28{,}8\ FE}}$

g) $|\vec{AB}| = 8$ $\qquad 8 \cdot 8 = \underline{\underline{64\,FE}}$

h) $V = \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe

$\hookrightarrow = 64$ $\qquad \hookrightarrow = 6$ (s. z-Koordinate)

$= \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 6 = \underline{\underline{128\ VE}}$

a) Punktprobe

$$\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

I $1 = -r \Leftrightarrow r = 1$ A liegt nicht auf g

II $3 = r$ ↯

$$\begin{pmatrix}2\\7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\7\\4\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

I $0 = -r \Leftrightarrow \underline{r = 0}$ B liegt nicht auf g

II $7 = r$ ↯

$$\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

I $-2 = r$ ↯ C liegt nicht auf g

II $2 = r$

b) $K: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

c) parallel? → Richtungsvektoren Vielfache?

$$r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

I $-r = 1 \iff \underline{\underline{r = -1}}$

II $r = 2$ ↯ nicht parallel!

Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$$

I $-r - s = -2$

II $r - 2s = 2$ löse mit GTR

III $r - s = 2$

$$\text{linSolve}\left(\begin{cases}-r-s=-2\\ r-2\cdot s=2\\ r-s=2\end{cases}, \{r,s\}\right) \quad \{2,0\}$$

Es gibt einen Schnittpunkt mit $r=2$ oder $s=0$ also den Punkt $(0|2|4)$

d) $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}2\\7\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = -1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 0 = 7 \neq 0$$

nicht senkrecht

**Aufgabe 3 Ballon und Flugzeug**

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14} = \underline{\underline{3.74}}$

$|\vec{v}| = \sqrt{30^2+60^2+60^2} = 90$

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}10\\15\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\10\\1\end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix}8\\10\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2+10^2+1^2} = 12.85$

Abstand 12.85 km.

c) Ballon: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ mit $r = 4$

$\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}10\\17\\4\end{pmatrix}}}$

Flugzeug $\begin{pmatrix}10\\15\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-30\\-60\\60\end{pmatrix}$ mit $s = 4$

$\begin{pmatrix}10\\15\\1\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}-30\\-60\\60\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-110\\-225\\241\end{pmatrix}}}$

d) $(2, 5, 1)$ liegt nicht auf der Bahn.

$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

I $\underline{\underline{r = 0}}$

II $\underline{\underline{r = 0}}$ liegt nicht auf der Bahn.

III $\underline{\underline{r = 1}}$

e) Ballon Flugzeug

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -30 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

anderer Buchstabe

$$\Leftrightarrow \quad r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} -30 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2r + 30s & = 8 \\ \text{II} & 3r + 60s & = 10 \\ \text{III} & r - 60s & = 1 \end{array}$$

Lösen mit GTR

$$\text{linSolve}\left(\begin{cases} 2\cdot r+30\cdot s=8 \\ 3\cdot r+60\cdot s=10 \\ r-60\cdot s=1 \end{cases},\{r,s\}\right)$$

"Keine Lösung gefunden"

f) I. gradlinig

Der Flug verläuft angeblich vollkommen gerade - was sicher niemals der Fall ist

II konstante Geschwindigkeit

Die Fluggeräte fliegen mit konstanter Geschwindigkeit, was sicher unmöglich ist.