

## Herleitung Obersumme $f(x) = x$

$$O = \frac{a}{n} \cdot f\left(\frac{a}{n}\right) + \frac{a}{n} f\left(2 \frac{a}{n}\right) + \dots + \frac{a}{n} \cdot f\left(n \frac{a}{n}\right)$$

$$= \frac{a}{n} \cdot \left[ f\left(\frac{a}{n}\right) + f\left(2 \frac{a}{n}\right) + \dots + f\left(n \frac{a}{n}\right) \right]$$

mit  $f(x) = x$  ist  $f\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{a}{n}$

$$= \frac{a}{n} \cdot \left[ \frac{a}{n} + 2 \frac{a}{n} + \dots + n \frac{a}{n} \right]$$

$$= \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \underbrace{\left[ 1 + 2 + \dots + n \right]}$$

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\substack{\text{gegen } 0 \\ \text{gegen } 1}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} a^2}}$$

